代数幾何学シンポジウム記録
1997年度 pp.30-47

Donaldson-Friedman construction and deformations of a triple of compact complex spaces

本多宣博
大阪大学大学院理学研究科 D3

1 twistor space と self-dual 4-manifold

Z を 3 次元複素多様体, M を oriented な実 4 次元多様体とする. Z が M 上の twistor space であるとは, C^∞ な $\mathbb{P}^1$-bundle map $\pi : Z \to M$ が存在して, 次の条件 (i) と (ii) を満たすときをいう:

(i) 任意の $x \in M$ に対して, $L_x := \pi^{-1}(x)(\simeq \mathbb{P}^1)$ は Z の複素部分多様体で, その normal bundle は $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$ である.

(ii) Z 上には anti-holomorphic な involution $\sigma : Z \to Z$ が存在して, 任意の L_x を保つ.

π は twistor fibration, L_x は (x 上の) twistor line, σ は real structure と呼ばれる. 条件 (i) から π は M 上のどんな local complex structure に関しても決して holomorphic にはなり得ない.

このような特殊な構造を持つ複素多様体を考える理由の一つに次の事実がある:

Penrose 対応 (cf. [AHS]): 向きづけられた実 4 次元多様体 M が与えられたとき, M 上の self-dual conformal structure $[g]$ と, M の twistor space の間には自然な 1

対1対応がある.

ここで, g の定める conformal class $[g]$ とは, $\{e^u g \mid u$ は M 上の smooth function$\}$ という Riemann 計量全体のことである. また 4 次元多様体上の Riemann 計量 g が self-dual であるとは, g の Weyl 共形曲率の anti-self-dual part (これは曲率を既約分解したときに conformal invariant な part のうちの一つである) が 0 であることである.

self-duality は conformal invariant な性質であり, また 4 次元 Riemann 幾何学特有の概念である.

compact な self-dual manifold の基本的な例を 2 つ挙げる.

(1) M を 4 次元球面 S^4, をその上の標準的な計量とすると, g は self-dual で, 対応する twistor space は $\mathbb{P}^3$ である. twistor fibration $\pi : \mathbb{P}^3 \to S^4$ は次のように explicit に書ける:

$\mathbb{H} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$ を四元数体とし, $\mathbb{R} + \mathbb{R}i = \mathbb{C}$, $\mathbb{R}j + \mathbb{R}k = (\mathbb{R} + \mathbb{R}i)j \simeq \mathbb{C}$ とみなすことにより, $\mathbb{H} \simeq \mathbb{C}^2$ とみる.

$$\mathbb{P}^3 = \mathbb{C}^4 \backslash \{0\} / \mathbb{C}^* \simeq \mathbb{H}^2 \backslash \{0\} / \mathbb{C}^*,$$

$$S^4 = \mathbb{R}^4 \cup \{\infty\} = \mathbb{H} \cup \{\infty\} = \mathbb{HP}^1 = \mathbb{H}^2 \backslash \{0\} / \mathbb{H}^\times$$

(ここで $\mathbb{H}^\times := \mathbb{H} \backslash \{0\}$ であり, $\mathbb{H}^\times$ の $\mathbb{H}^2$ への作用は右からのかけ算とする) とみなせば, $\mathbb{C}^* \subseteq \mathbb{H}^\times$ より twistor fibration $\pi : \mathbb{P}^3 \to S^4$ が induce される. また, $\mathbb{H}^2 = \mathbb{C}^4$ 上には $\times j$ (右から j をかける) という作用があるが, これを $\mathbb{P}^3$ 上に落としたものを σ とする (これは $\mathbb{H}P^1 = S^4$ まで落とせば trivial になる) と, σ が real structure である. 容易にわかるように, π の fiber (= twistor line) は σ で不変な line, したがってその $\mathbb{P}^3$ 内での normal bundle は $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$ である.

(2) $M = \mathbb{P}^2$ 上の Fubini-Study metric は (complex orientation に関して)

self-dual で, 対応する twistor space は flag manifold

$$\mathbb{F} := \{(\xi, \eta) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2*} \mid \xi \in \eta\}$$

である. ここで $\mathbb{P}^{2*}$ は dual projective plane を表す. $\mathbb{F}$ は $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2*}$ 内の bidegree が $(1,1)$ の非特異因子と identify できる. この場合も twistor fibration と real structure を具体的に与えることができる:

まず $V = \mathbb{C}^3$ とおき, h を V 上の standard な Hermitian form とする. $(\xi, \eta) \in \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V)^*$ に対して, l_ξ, H_ξ をそれぞれ ξ に対応する V 上の line, plane とする. このとき, l_ξ の H_ξ 内での h に関する直交補空間を $l_\xi^\perp$ とし, $l_\xi^\perp$ が定める $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^2$ の元を $\pi(\xi, \eta)$ とする. real structure σ は, (ξ, η) に対して $(\eta^\perp, \xi^\perp)$ を対応させる. (今度は $^\perp$ は V 全体の中での直交補空間を表す.)

compact な twistor space の存在については次の諸結果がある:

定理 1.1 (Hitchin [Hi]) compact な twistor space で Kähler 計量をもつものは上記 $\mathbb{P}^3$ と $\mathbb{F}$ しか存在しない.

定理 1.2 (Campana [C]) Moishezon twistor space に対応する 4 次元 self-dual manifold は $n\mathbb{P}^2 (= \mathbb{P}^2$ の $n \geq 0$ 個の連結和, ただし $0\mathbb{P}^2 = S^4$ と約束する$)$ と homeomorphic である.

定理 1.3 (Poon [P1], LeBrun [L], Joyce [J]) 任意の $n \geq 0$ に対して $n\mathbb{P}^2$ 上の twistor space で Moishezon であるものが存在する.

Poon と LeBrun の構成は具体的である:

W を, $\mathbb{P}^5$ 内の 2 つの quadrics

$$z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 = 0,$$

$$2z_1^2 + 2z_1^2 + \lambda z_2^2 + \frac{3}{2}z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 = 0$$

の complete intersection とする. ここで $\frac{3}{2} < \lambda < 2$. W は 4 つの通常特異点をもつ. このとき, W の small resolution $\mu : Z \to W$ で, Z が $2\mathbb{P}^2$ の twistor space になっているものが存在する (Poon). $n \geq 3$ の場合も, projective な variety に適当な双有理変換を施すことにより $n\mathbb{P}^2$ 上の twistor space の family が得られる (LeBrun).

Remark 1.4 一般に n が大きくなるほど $n\mathbb{P}^2$ 上の twistor space は豊富に存在する. $n \geq 5$ のときは, $n\mathbb{P}^2$ 上の generic な twistor space の代数次元は 0 である. したがって, 上の LeBrun の twistor space は非常に特殊なものであるが, 後で見るように, $n\mathbb{P}^2$ 上の Moshezon twistor space の系列は, これら以外にもいくつか存在する.

$n\mathbb{P}^2$ の twistor space を考えることが興味深いもう一つの理由として次の定理がある:

定理 1.5 (Freedman, Donaldson) (M, g) を単連結な compact self-dual manifold で, intersection form が正定値のものとすると, M は $n\mathbb{P}^2$ と homeomorphic である.

より一般な compact self-dual manifold (したがって compact twistor space) の存在については次の定理がある:

定理 1.6 (Taubes [T]) M を任意の oriented な 4 次元多様体とすると, ある正整数 $n_0 = n_0(M)$ が存在して, $n \geq n_0$ のとき $M \# n\mathbb{P}^2 (= M$に n 個の $\mathbb{P}^2$をくっつけたもの) の上には自己双対計量が存在する.

twistor space を考えることにより, 次の系を得る:

系 1.7 任意の有限生成な群 Γ に対して, compact な twistor space で基本群が Γ であるものが存在する.

このように, (compact な) twistor space は非常に豊富に存在するが, そのほとんどは代数次元が 0 であると考えられる.

2 主結果

前節では, 数多くの twistor space の中で, $n\mathbb{P}^2$ 上の self-dual metric に付随する twistor space が基本的な対象であることをみた. この節では, $n\mathbb{P}^2$ 上の twistor space について知られている事実と, そこから自然に導かれる問題, および我々の得た結果を述べる.

以下では Z は $n\mathbb{P}^2$ 上の twistor space とする. Z 上には, half-anticanonical bundle $-\frac{1}{2}K_Z$ がつねにただ一つ存在する (i.e. $(-\frac{1}{2}K_Z)^{\otimes 2} \simeq -K_Z$) . adunction formula $K_L \simeq K_Z|_L \otimes \det N_{L/Z}$ より $-\frac{1}{2}K_Z|_L \simeq \mathcal{O}_L(2)$ である. (ここで L は twistor line を表す.) $\sigma : Z \to Z$ は $-\frac{1}{2}K_Z$ 上にも lift し, 線形系 $|-\frac{1}{2}K_Z|$ に作用する. その不変部分を $|-\frac{1}{2}K_Z|^\sigma$ で表す. $\dim_{\mathbb{C}} |-\frac{1}{2}K_Z| = m$ とするとき, $|-\frac{1}{2}K_Z|^\sigma$ は $\mathbb{RP}^m$ (m 次元実射影空間) でパラメトライズされる.

命題 2.1 (Pedersen-Poon [PP1]) S を $|-\frac{1}{2}K_Z|^\sigma$ の既約元とするとき, S は非特異で, 双有理射 $\nu : S \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ が存在する. ν は S 上の real structure を保ち, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上に real structure $\tau :=$ (anti-podal map)$\times$(complex conjugation) を induce する. さらに $c_1^2(S) = 8 - 2n$ である.

すなわち, $S \in |-\frac{1}{2}K_Z|^\sigma$ は既約ならば $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の $2n$ 点 blowing up になっている. (可約ならば, $S = D + \overline{D}$ (D は $\mathbb{P}^2$ の n 点 blowing up) と分解する.)

これまで知られている $n\mathbb{P}^2$ 上の twistor space の場合, ν は次のようになっている.

(1) $Z = \mathbb{P}^3$ (twistor space of $0\mathbb{P}^2 = S^4$) の場合, $-\frac{1}{2}K_Z = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)$ なので, $S \in |-\frac{1}{2}K_Z|^\sigma$ は real (すなわち $\sigma : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$; $(z_0 : z_1 : z_2 : z_3) \to (-\overline{z}_1 : \overline{z}_0 : -\overline{z}_3 : \overline{z}_2)$ で不変) な 2 次曲面である. これらは必ず非特異で, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ に同型である.

(2) Z を LeBrun ([L]) の構成した $n\mathbb{P}^2$ の構成した twistor space とする. この場合も既約な $S \in |-\frac{1}{2}K_Z|^\sigma$ がいつでも存在し, ν は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の bidegree が $(1, 0)$ の

曲線 C 上の n 点 $\{p_1, \cdots, p_n\}$ と, $\overline{C} := \tau(C)$ 上の n 点 $\{\overline{p}_1, \cdots, \overline{p}_n\}$ を center とする $2n$ 点 blowing up になっている. 逆に, このような構造の S を $|-\frac{1}{2}K_Z|^\sigma$ の元にもつ $n\mathbb{P}^2$ 上の twistor space Z は LeBrun の twistor space になっていることを示すことができる.

(3) Z を Pedersen-Poon ([PP3]) が存在を示した $n\mathbb{P}^2$ 上の twistor space とする. Z には torus $U(1) \times U(1)$ が real structure を保って作用する. この場合, 既約な $S \in |-\frac{1}{2}K_Z|^\sigma$ が存在し, ν は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の standard な torus action を保つ $2n$ 回 blowing up である. (詳しくは [Hon1] 参照.)

このように, $|-\frac{1}{2}K_Z|^\sigma$ の元の構造 (すなわち $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の $2n$ 点の配置) は Z の構造と密接に関係していると考えられる. そこで, 我々は次の問題を考えたい:

問題 2.2 (命題 2.1 の逆) $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の勝手な n 点 $\{p_1, \cdots, p_n\}$ (infinitly near な場合も含める) に対して, それらから定まる $2n$ 点 $\{p_1, \cdots, p_n, \tau(p_1), \cdots, \tau(p_n)\}$ で blowing up してできる有理曲面 S を $|-\frac{1}{2}K_Z|^\sigma$ の既約元にもつ $n\mathbb{P}^2$ 上の twistor space Z が存在するか.

この問いに対する我々の結果を述べるために次の概念を用意する:

定義 2.3 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の $2n$ 点 $\{p_1, \cdots, p_n, \overline{p}_1, \cdots, \overline{p}_n\}$ で blowing up して得られる有理曲面 S が (a, b)-type $\iff$ $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の bidegree (a, b) の既約曲線 C で, $\tau(C) = C$, かつ $\{p_1, \cdots, p_n\} \subseteq C$ となっているものが存在する.

(この定義では, 与えられた $\nu : S \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の type は一意には定まらないが, 我々の目的のためにはこれで十分である.)

このとき, 次が成立する:

定理 2.4 [Hon2, Theorem 1.1] 任意の $n \geq 0$ に対して, $n\mathbb{P}^2$ twistor space Z で, $(2,1)$-type の有理曲面を $|-\frac{1}{2}K_Z|^\sigma$ の既約元にもつものが存在する. $(2,2)$-type の場合も同様の結論が成立する.

(2,1)-type の場合の twistor space は興味深い性質を持つ. 一般に, compact な twistor space Z 上の divisor に対して, その degree を twistor line との intersection number として定義する. effective divisor の degree は常に正である.

命題 2.5 [Hon2, Proposition 1.2] Z を $n\mathbb{P}^2$ 上の twistor space で (2,1)-type の有理曲面 S を $|-\frac{1}{2}K_Z|^\sigma$ の既約元に持つものとすると, Z は Moishezon で degree 1 の divisor を持たない.

特に, Pedersen-Poon の問題 ([PP2, p.687, Question]) に否定的な解答を与える.

Remark 2.6 (i) 一般に, $n\mathbb{P}^2$ 上の twistor space Z が $|-\frac{1}{2}K_Z|$ の元をもつとは限らないが, 現在のところそのような twistor space で興味深い性質をもつものは見つかっていないと思われる.
(ii) 一般に, $S \in |-\frac{1}{2}K_Z|^\sigma$ の複素構造から Z の複素構造は一意的には定まらない. しかし, その代数次元や幾何的な構造についてはほとんど定まる. たとえば (2,1)-type の S をもつ Z の場合, $\mathbb{P}^2$ 上の conic bundle を双有理変換で modify したものになっている.
(iii) $(2,1)$-type の場合の twistor space の存在については, Kreussler [Kr] が全く異なる方法で存在を示している.
(iv) 定理とは直接関係がないが, 次が成立する:

$n \geq 3$ のとき, $n\mathbb{P}^2$ 上の twistor space Z は $\dim|-\frac{1}{2}K_Z| \leq 3$ を満たす. $n \geq 4$ のとき、

Z が LeBrun [L] の構成した twistor space $\Longleftrightarrow$ $\dim|-\frac{1}{2}K_Z|=3$

が成立する. このとき, $|-\frac{1}{2}K_Z|$ による有理写像の像は $\mathbb{P}^3$ 内の非特異な 2 次曲面 Q で, Z のある birational projective model W が Q 上の conic bundle structure をもつ.

3 Donaldson-Friedman construction とその精密化

この節では, 定理 2.4 を証明する際の基礎となる Donaldson-Friedman による構成 ([DF]) と, その精密化である triple version を説明する.

Z_1, Z_2 をそれぞれ compact な self-dual manifolds $(M_1, g_1), (M_2, g_2)$ の twistor space とする. このとき, $M_1 \# M_2$ ($= M_1$ と M_2 の連結和) の twistor space を, compact complex space の変形理論を使って Z_1 と Z_2 から構成しようというのが Donaldson-Friedman の理論である.

$L_1 \subsetneq Z_1,\ L_2 \subsetneq Z_2$ を任意のtwistor line (=twistor fibration $\pi: Z_i \to M_i$ の fiber) とし, $\mu_i: Z_i' \to Z_i$ を L_i を center とする blowing up, Q_i をその例外因子とする. $N_{L_i/Z_i} \simeq \mathcal{O}(1)^{\oplus 2}$ であることから, $Q_i \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $N_{Q_i/Z_i'} \simeq \mathcal{O}_{Q_i}(-1,1)$ である. ここで $\mathcal{O}_{Q_i}(0,1) := \mu_i^*\mathcal{O}_{L_i}(1)$ とおいた. $\phi: Q_1 \to Q_2$ を, $\phi^*\mathcal{O}_{Q_2}(0,1) \simeq \mathcal{O}_{Q_1}(1,0)$ を満たす双正則写像で real structure を保つものとする. このような ϕ はいつでも存在する. ϕ で例外因子どうしを同一視して得られる normal crossing variety

$$Z' := Z_1' \underset{\phi}{\cup} Z_2'$$

を考える. 構成の仕方から, Z' も real structure σ' をもつ.

定義 3.1 [DF] Z' の <u>standard deformation</u> とは, $n+3$ 次元複素多様体 $\mathcal{Z}$, $\mathbb{C}^n$ 内の 0 を含む open ball B と全射正則写像 $p: \mathcal{Z} \to B$ で次を満たすものである:

(i) $p^{-1}(0) \simeq Z'$,

(ii) $\mathcal{Z}$ 上には anti-holomorphic involution σ で, $\sigma_B \cdot p = p \cdot \sigma$ (σ_B は複素共役を表す) を満たし, かつ $\sigma|_{p^{-1}(0)}$ が Z' 上の real structure σ' と ((i) の同型のもとで) 一致するものが存在する,

(iii) 任意の $z \in p^{-1}(0)$ に対して, z の $\mathcal{Z}$ における近傍 U とその上の正則座標 $(z_1, z_2, z_3, z_4, t_2, \cdots, t_n)$ で, $p(z_1, z_2, z_3, z_4, t_2, \cdots, t_n) = (z_1 z_2, t_2, \cdots, t_n)$ と書けるものが存在する.

条件 (iii) より, $Z_t := p^{-1}(t)$ は $t_1 \neq 0$ のとき smooth である. さらにすべての $t_i \in \mathbb{R}$ であれば, (ii) により Z_t 上には anti-holomorphic involution σ_t が存在する. このとき次が成立する.

定理 3.2 (Donaldson-Friedman) (M_1, g_1), (M_2, g_2) を compact self-dual manifolds, Z_1, Z_2 をその twistor space とし $Z' = Z_1' \cup_\phi Z_2'$ を上で構成した normal crossing variety とする. $p : \mathcal{Z} \to B$ を Z' の standard deformation とすれば, (必要ならば B を十分小さく取ることにより) 非特異な fiber $Z_t = p^{-1}(t)$, t : real は $M_1 \# M_2$ ($=M_1$ と M_2 の連結和) 上の twistor space の構造を自然にもつ.

証明では, smoothing によって得られた Z_t (t : real) 上に twistor line の family が存在することを示すために, formal neighbourhood の議論を使う.

standard deformation の存在については次の簡明な十分条件がある:

命題 3.3 *(同上)* $H^2(\Theta_{Z_1}) = H^2(\Theta_{Z_2}) = 0$ ならば, Z' の standard deformation が存在する. ここで Θ は tangent sheaf を表す.

この命題の証明の key は,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{Z'}}(\Omega_{Z'}, \mathcal{O}_{Z'}) &\simeq \mathcal{O}_Q(N_{Q_1/Z_1'} \otimes N_{Q_2/Z_2'}) \\
&\simeq \mathcal{O}_{Q_1}(-1, 1) \otimes \mathcal{O}_{Q_2}(1, -1) \\
&\simeq \mathcal{O}_Q
\end{aligned}
$$

(すなわち R. Friedman の意味で d-semistable) になっていることである. ここで $\Omega_{Z'}$ は Z' 上の Kähler differential の sheaf を表す.

定理 3.2 と命題 3.3 より次がしたがう.

系 3.4 (同上) 任意の $n \geq 0$ に対して $n\mathbb{P}^2$ 上の twistor space Z で $H^2(\Theta_Z) = 0$ となっているものが存在する.

証明. n に関する帰納法による. $n = 0, 1$ のときは §1で挙げたように, $\mathbb{P}^3$, $\mathbb{F}$という twistor space がある. Akizuki-Nakano の消滅定理から, これらは $H^2(\Theta) = 0$ を満たす. 次に $(n-1)\mathbb{P}^2$ 上の twistor space Z_1 で $H^2(\Theta_{Z_1}) = 0$ を満たすものが存在したと仮定する. $Z_2 = \mathbb{F}$ とし, 上のように $Z' = Z_1' \cup_\phi Z_2'$ をつくると, 命題 3.3 から Z' の standard deformation が存在するので, 定理 3.2 より $((n-1)\mathbb{P}^2)\#\mathbb{P}^2 = n\mathbb{P}^2$ 上の twistor space Z が存在する. このとき hypercohomology の次元の上半連続性により, $H^2(\Theta_Z) = 0$ がしたがう.

以上が Donaldson-Friedman の理論 ([DF]) の概要である. この構成では, twistor line L_1, L_2 のとり方 (すなわちどの点の近傍で連結和をとるか) や smoothing の仕方に任意性があるので, 一般には $M_1\#M_2$ の twistor space がたくさんできる. 言いかえると, 一般に $M_1\#M_2$ 上の self-dual metric の family ができる. そこでこの中から良い性質を持つ metric を取り出すために, twistor space 上の divisor を込みにして (すなわち Z' とその上の divisor S' の pair (Z', S') を考えて) smoothing を考えれば, 特殊な metric (正確にはある open set 上, Kähler metric と conformal equivalent になっている (anti-)self-dual metric) に対応する twistor space の存在を示すことができる. しかし一般にはこのような pair (Z', S') の smoothing だけを考えていてはどのような計量 (正確には Kähler metric に関する複素構造) が得られたかは十分にはわからない. そこで, さらに divisor S' の上の曲線 C' を考えて, triple (Z', S', C')

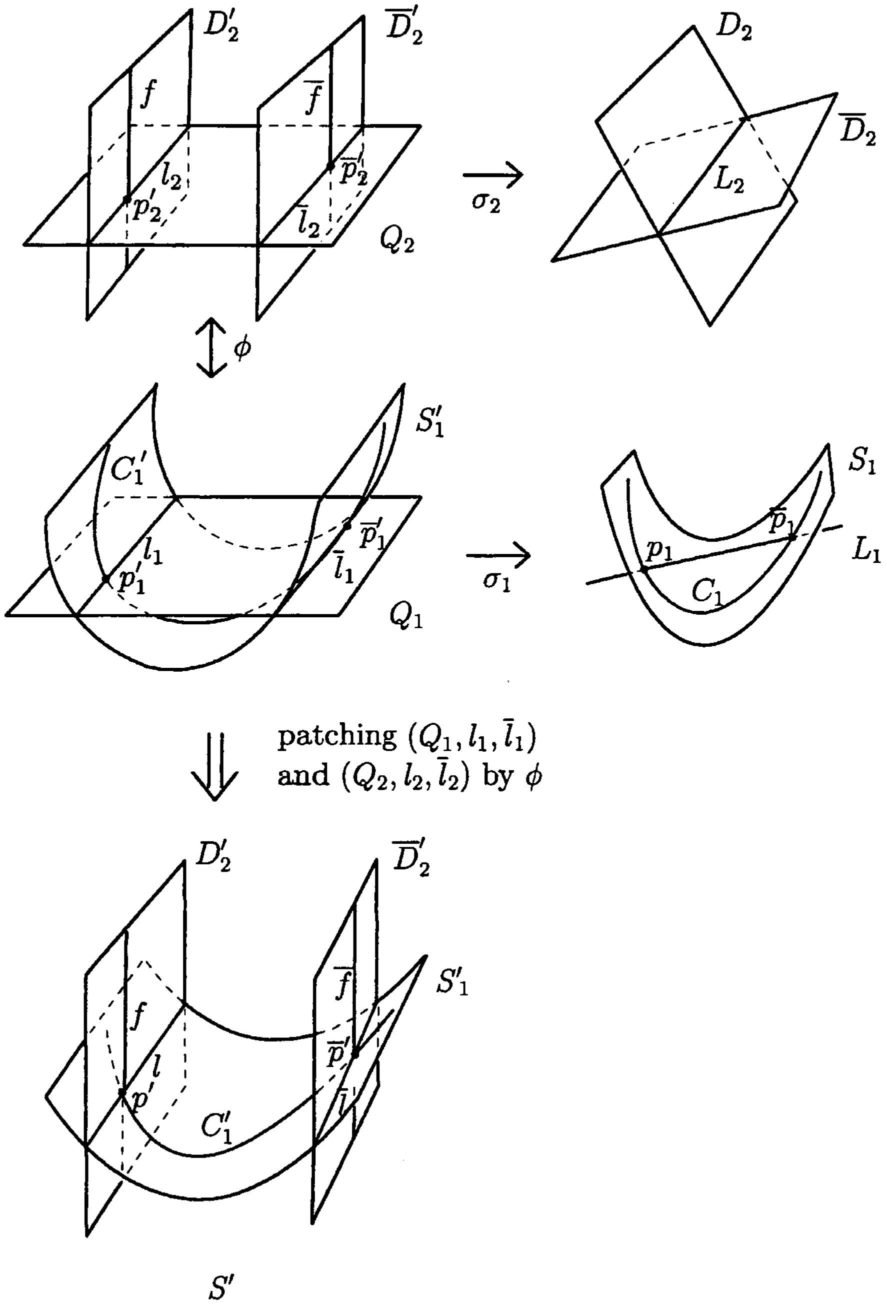
の smoothing を考えると, ある程度 metric に関する情報が得られる.

Remark 3.5 (i) Pedersen-Poon [PP3] は Donaldson-Friedman construction を群作用込みで考えることにより, 別の方向への精密化を行っている. 特に彼らは, $\mathbb{P}^2$ への standard な $U(1) \times U(1)$-action を考えることにより, $U(1) \times U(1)$ の作用をもった $n\mathbb{P}^2$ 上の twistor space (ここでは Z_{PP} で表す) の存在を示している (cf. §2 (3)). そこで [Hon1] では, $U(1) \times U(1)$ の作用で不変な $\mathbb{F}$ 上の divisor に着目して, Z_{PP} 上には toric surface の pencil が存在することを証明した. (特に Z_{PP} は Moishezon である.) よって問題 2.2 は S が toric surface の場合は肯定的である.
(ii) 次節では triple の smoothing の応用として $n\mathbb{P}^2$ の場合に特殊な twistor space の存在を示すが, ほかにもこの方法を使って, primary Hopf surface のある blowing up 上に anti-self-dual metric が存在することを証明することができる [Hon3].

Donaldson-Friedman の方法で twistor space を構成することのひとつの利点は, self-dual metric の degeneration を扱っていることに対応する点である. self-dual metric の degeneration の基本的な例において, 対応する twistor space で起こっている幾何的な状況を調べることは興味深いことと思われる.

4 定理 2.4 の証明のあらすじ

定理 2.4 は n に関する帰納法で証明する. $n = 0, 1$ のときに成立することは容易にわかる. そこで $n-1$ のときに成立すると仮定する. すなわち, $(n-1)\mathbb{P}^2$ 上の twistor space Z_1 で (2,1)-type (または(2,2)-type) の half anti-canonical divisor $S_1 \in |-\frac{1}{2}K_{Z_1}|^{\sigma_1}$ をもったものが存在すると仮定する. (ここで σ_1 は Z_1 上の real structure を表す.) $\nu_1 : S_1 \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ を定義 2.3 に現れる blowing down とし, $C_1 \subseteq S_1$ を, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$



D'_2
$\overline{D}'_2$
f
$\overline{f}$
l_2
p'_2
$\overline{p}'_2$
$\overline{l}_2$
Q_2
σ_2
D_2
$\overline{D}_2$
L_2
ϕ
S'_1
C'_1
l_1
p'_1
$\overline{p}'_1$
$\overline{l}_1$
Q_1
σ_1
S_1
$\overline{p}_1$
p_1
L_1
C_1
patching $(Q_1, l_1, \bar{l}_1)$
and $(Q_2, l_2, \bar{l}_2)$ by ϕ
D'_2
$\overline{D}'_2$
$\overline{f}$
S'_1
f
l
p'
$\overline{p}'$
$\overline{l}'$
C'_1
S'

上の bidegree が (2,1) (または (2,2))である (τ で不変な) 既約曲線 C の proper transform とする. ($C_1^2 = 4 - 2n$ (または $8 - 2n$) である.) $p_1 \in C_1$ を任意に取り, p_1 と $\overline{p}_1 := \sigma_1(p_1)$ を通る twistor line (もちろんただ一つ存在する) を L_1 ($\subseteq Z_1$) とする. L_1 と S_1 は $p_1, \overline{p}_1$ で transversal に交わる. Q_1 ($\simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$) を μ_1 の例外因子, $S_1' := \mu_1^{-1}(S_1), C_1' := \mu_1^{-1}(C_1)$ とおく. $\mu_1|_{S_1'} : S_1' \to S_1$ は $p_1, \overline{p}_1$ を center とする blowing up になっている. その例外曲線を $l_1, \overline{l}_1$ とすると, $S_1' \cap Q_1 = \{l_1, \overline{l}_1\}$ である.

次に $Z_2 = \mathbb{F}$ (= twistor space of $\mathbb{P}^2$) とおき, $L_2 \subseteq Z_2$ をひとつとる. ($\mathbb{P}^2$ は homogeneous なのでどれをとっても同じである.) L_2 で transversal に交わる degree 1 divisor の組 $\{D_2, \overline{D}_2 := \sigma_2(D_2)\}$ がただ一つ存在する. $D_2 \simeq \Sigma_1 \simeq \overline{D}_2$ であることは容易にわかる. ここで $\Sigma_1 := \mathbb{P}(\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O})$ は 1 次の Hirzebruch surface を表す. L_2 を center とする blowing up を $\mu_2 : Z_2' \to Z_2$ とし, $D_2', \overline{D}_2'$ をそれぞれ $D_2, \overline{D}_2$ の proper transform とする. $D_2' \simeq D_2$, $\overline{D}_2' \simeq \overline{D}_2$ である. さらに $l_2 := D_2' \cap Q_2$, $\overline{l}_2 := \overline{D}_2' \cap Q_2$ ($Q_2 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$: μ_2 の例外因子) とおく.

このとき, real structure を保つ双正則写像 $\phi : Q_1 \to Q_2$ で, $\phi^* \mathcal{O}_{Q_2}(0,1) \simeq \mathcal{O}_{Q_1}(1,0)$ かつ $\phi(l_1) = l_2, \phi(\overline{l}_1) = \overline{l}_2$ を満たすものが存在する. $p_2 := \phi(p_1) \in l_2$, $\overline{p}_2 := \phi(\overline{p}_1) \in \overline{l}_2$ とし, p_2, $\overline{p}_2$ を通る $\Sigma_1 \to \mathbb{P}^1$ の fiber をそれぞれ $f_2' \subseteq D_2'$, $\overline{f}_2' \subseteq \overline{D}_2'$ とする.

$$Z' := Z_1' \underset{Q}{\cup} Z_2',$$

$$S' := S_1' \underset{l,\overline{l}}{\cup} (D_2' \amalg \overline{D}_2') = D_2' \underset{l}{\cup} S_1' \underset{\overline{l}}{\cup} \overline{D}_2',$$

$$C' := C_1' \underset{p',\overline{p}'}{\cup} (f \amalg \overline{f}) = f \underset{p'}{\cup} C_1' \underset{\overline{p}'}{\cup} \overline{f}$$

とおく. S' (resp. C') は Z' (resp. S') 上の σ'-不変な Cartier divisor である. ここで σ' は Z' 上の real structure を表す。以下, この triple (Z', S', C') の smoothing を考察する.

通常の compact complex space の変形理論と同様に, triple の場合も local Ext sheaf $\Theta^i_{Z',S',C'}$ と global Ext group $T^i_{Z',S',C'}$ が定義され, 次のような幾何的な意味をもつ [Hon2, §5]: $\Theta^1_{Z',S',C'}$ は Q をsupport にもち, singularity の local な first order smoothing を表し, $\Theta^2_{Z',S',C'}$ はその obstruction space である. $T^1_{Z',S',C'}$ は triple (Z',S',C') の global な変形の倉西空間の Zariski tangent space であり, $T^2_{Z',S',C'}$ はその obstruction space である. 特に $T^2_{Z',S',C'}=0$ のとき, (Z',S',C') の変形の倉西族のパラメータ空間は非特異である.

local Ext sheaf に関しては, 我々の状況では次が成立する:

命題 4.1

$$\Theta^i_{Z',S',C'} \simeq \Theta^i_{Z'} \simeq \begin{cases} \mathcal{O}_Q & i=1, \\ 0 & i \geq 2. \end{cases}$$

(Z',S',C') の global な変形については, local to global spectral sequence

$$E_2^{p,q} := H^p(\Theta^q_{Z',S',C'}) \Rightarrow T^{p+q}_{Z',S',C'}$$

から induce される次の完全列が基本的である:

$$0 \to H^1(\Theta^0_{Z',S',C'}) \to T^1_{Z',S',C'} \to H^0(\Theta^1_{Z',S',C'}) \to H^2(\Theta^0_{Z',S',C'}) \to T^2_{Z',S',C'}. \quad (1)$$

ここで, $T^1_{Z',S',C'}$ の部分空間 $H^1(\Theta^0_{Z',S',C'})$ は, triple (Z',S',C') の locally trivial な first order deformation を表す.

補題 4.2 $H^2(\Theta^0_{Z',S',C'})=0$.

この補題と命題 4.1 と (1) を合わせて次を得る. ($E_2^{p,q}=0$ for $q\geq 2$ なので (1) は long exact sequence になる.)

命題 4.3 $T^2_{Z',S',C'} = 0$. また次の完全列がある:

$$0 \to H^1(\Theta^0_{Z',S',C'}) \to T^1_{Z',S',C'} \to \mathbb{C} \to 0.$$

$\{\mathcal{Z} \xrightarrow{p} B,\ \mathcal{S} \to B,\ \mathcal{C} \to B$ with $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{Z}\}$ を (Z', S', C') の変形の倉西族とする. ここで命題 4.3 より B は $T^1_{Z',S',C'}$ 内の 0 を含む open ball と同一視できる. このとき次が成立する.

命題 4.4 (必要ならば B を十分小さく取ると) 0 を含む B 内の smooth で σ-不変な超曲面 H が存在して, $t \in B \backslash H$ のとき, $Z_t := p^{-1}(t), S_t := Z_t \cap \mathcal{S}, C_t := S_t \cap \mathcal{C}$ はすべて非特異かつ既約であり, さらに t が real ならば, Z_t は $(n-1)\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 = n\mathbb{P}^2$ 上の twistor space の構造を自然に持ち, S_t は $|-\frac{1}{2}K_{Z_t}|^{\sigma_t}$ の元である. (ここで σ_t は Z_t 上の real structure を表す.)

この命題における超曲面 H の 0 における tangent space は $H^1(\Theta^0_{Z',S',C'})$ と identify できる.

定理 2.4 を示すためには, 命題 4.4 における S_t が (2,1)-type (または (2,2)-type) であることを示せばよい. 実際次が成立する.

命題 4.5 pair (S', C') の変形は unobstructed である. $\{S' \xrightarrow{q} B', C' \to B'$ with $C' \hookrightarrow S'\}$ をその倉西族とするとき, B' 内の smooth で σ-不変な超曲面 $H' \ni 0$ が存在して, $t \in B' \backslash H'$のとき, $S_t := q^{-1}(t)$ と $C_t := S_t \cap C'$ は非特異かつ既約で, S_t は (2,1)-type (または (2,2)-type) の有理曲面である.

最後に, triple (Z', S', C') の変形と pair (S', C') の変形を関係づける次の補題を使って定理 2.4 の証明が完了する.

補題 4.6 次の完全可換図式が存在する:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
H^1(\Theta^0_{Z'}(-S')) & \to & H^1(\Theta^0_{Z',S',C'}) & \to & H^1(\Theta^0_{S',C'}) & \to & H^2(\Theta^0_{Z'}(-S')) & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathrm{Ext}^1(\Omega_{Z'}(S'),\mathcal{O}_{Z'}) & \to & T^1_{Z',S',C'} & \xrightarrow{g} & T^1_{S',C'} & \to & \mathrm{Ext}^2(\Omega_{Z'}(S'),\mathcal{O}_{Z'}) & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & H^0(\mathcal{O}_Q) & \to & H^0(\mathcal{O}_l \oplus \mathcal{O}_{\bar{l}}) & \to & H^1(\mathcal{O}_Q(-l-\bar{l})) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

Remark 4.7 上の可換図式は C' をすべて省いてもそのまま成立する. さらに実際には $H^2(\Theta^0_{Z'}(-S')) = 0$ が成立する. $H^1(\mathcal{O}_Q(-l-\bar{l})) \simeq H^1(\mathcal{O}_Q(0,-2)) \simeq \mathbb{C}$ であるから、結局完全列

$$T^1_{Z',S'} \xrightarrow{f} T^1_{S'} \to \mathbb{C} \to 0$$

が存在することがわかる. ここで, f が surjective でないこと, すなわち pair (Z', S') の変形に対して S' のみの変形を考えるという forgetting functor が 1 次の level で surjective でないことが問題 2.1 を難しくしている.

References

[A] M. Artin, Grothendieck Topologies, Harvard notes.

[AHS] M. Atiyah, N. Hitchin, I. Singer, *Self-duality in four dimensional Riemannian geometry*, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **362** (1978), 425–461.

[C] F. Campana, *The class C is not stable by small deformations*, Math. Ann. **290** (1991), 19–30.

[DF] S. K. Donaldson, R. Friedman, *Connected sums of self-dual manifolds and deformations of singular spaces*, Nonlinearlity **2** (1989), 197–239.

[G] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tôhoku Math. J. **9** (1957), 119–221.

[Hi] N. Hitchin, *Kählarian twistor spaces*, Proc. London Math. Soc. (3) **43** (1981), 133–150.

[Hon1] N. Honda, *On the structure of Pedersen-Poon twistor spaces*, preprint, (1996).

[Hon2] N. Honda, *Donaldson-Friedman construction and deformations of a triple of compact complex spaces*, preprint, (1997).

[Hon3] N. Honda, *On the existence of anti-self-dual metrics on blown-up Hopf surfaces*, in preparation.

[Hor] E. Horikawa, *Deformations of holomorphic maps. III*, Math. Ann. **222** (1976), 275–282

[J] D. Joyce, *Explicit construction of self-dual 4-manifolds*, Duke Math. J. **77** (1995), 519–552.

[KP] J. Kim, M. Pontecorvo, *A new method of constructiong scalar-flat Kähler surfaces*, J. Diff. Geom. **41** (1995), 449–477.

[Kr] B. Kreussler, *Moishezon twistor spaces without effective divisors of degree one*, J. Alg. Geom. **6** (1997), 379–390.

[L] C. LeBrun, *Explicit self-dual metrics on* $\mathbb{P}_2\#\cdots\mathbb{P}_2$, J. Diff. Geom. **34** (1991), 223–253.

[PP1] H. Pedersen, Y. S. Poon, *Self-duality and differentiable structures on the connected sum of complex projective planes*, Proc. Amer. Math. Soc. **121** (1994), 859–864.

[PP2] H. Pedersen, Y. S. Poon, *A relative deformation of Moishezon twistor spaces*, J. Alg. Geom. **3** (1994), 685–701

[PP3] H. Pedersen, Y. S. Poon, *Equivariant connected sums of compact self-dual manifolds*, Math. Ann. **301** (1995), 717–749.

[P1] Y. S. Poon, *Compact self-dual manifolds of positive scalar curvature*, J. Diff. Geom. **24** (1986), 97–132.

[P2] Y. S. Poon, *On the algebraic structure of twistor spaces*, J. Diff. Geom. **36** (1992), 451–491.

[R] Z. Ran, *Deformation of maps*, Algebraic Geometry Proceedings (Trento,1988). Lecture Notes in Math. (E. Ballico, C. Ciliberto, eds.), vol. 1389, Springer, Berlin, 247–253.

[T] C. Taubes, *The existence of anti-self-dual conformal structres*, J. Diff. Geom. **36** (1992),163–253.